

Zur Prüfung allgemein-relativistischer Rotationseffekte mittels eines Ringlasers*

H. DEHNEN

Institut für Theoretische Physik der Universität Freiburg i. Br.

(Z. Naturforsch. 22 a, 816—821 [1967]; eingegangen am 11. Januar 1967)

Es werden die optischen Konsequenzen der Rotation der Erde, besonders hinsichtlich allgemein-relativistischer Effekte, untersucht. Es zeigt sich, daß letztere Effekte so klein sind, daß sie auch mit Hilfe eines Ring-Lasers z. Zt. nicht nachgewiesen werden können.

§ 1. Einführung

Bekanntlich gelang es MICHELSON schon im Jahre 1925, die Rotation der Erde relativ zum Fixsternhimmel mit Hilfe eines Interferenzversuches nachzuweisen¹. Er benutzte hierzu die bereits von SAGNAC² verwendete Versuchsanordnung zum optischen Nachweis von Drehbewegungen gegenüber einem Inertialsystem:

In einer horizontalen Ebene sind vier Spiegel 1, 2, 3, 4 derart angeordnet, daß sie einen geschlossenen Lichtweg ergeben, welcher beispielsweise ein Quadrat der Seitenlänge l umschließt. Ist der Spiegel 1 halbdurchlässig, so kann man mit einer Hilfsanordnung von weiteren 3 Spiegeln (s. Abb. 1) kohärentes monochromatisches Licht der Lichtquelle L

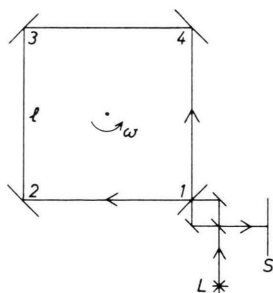


Abb. 1. MICHELSON-SAGNACSche Versuchsanordnung zum Nachweis der Erdrotation (L Lichtquelle, S Schirm). Die Fläche, welche von den Hilfsspiegeln aufgespannt wird, sei klein gegen das Quadrat 1, 2, 3, 4, so daß ihr Einfluß auf das Meßergebnis vernachlässigbar ist.

gleichzeitig den Weg 1, 2, 3, 4, 1 und den entgegengesetzten Weg 1, 4, 3, 2, 1 durchlaufen lassen. Ruhen alle Spiegel im Inertialsystem, so werden beide Strahlen zur gleichen Zeit nach 1 zurückkehren und vermittle der Hilfsspiegel auf dem Schirm S ein

dementsprechendes System von Interferenzstreifen erzeugen. Rotiert jedoch das gesamte System gegenüber dem Inertialsystem, wie das auf der Erde der Fall ist, so tritt eine Laufzeitdifferenz δT zwischen den beiden Lichtstrahlen auf, die der Projektion der Winkelgeschwindigkeit ω auf die Flächennormale \mathbf{n} des Quadrats proportional ist, welches von den vier Spiegeln 1, 2, 3, 4 gebildet wird; somit ist

$$\delta T = \omega \cdot \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

wobei

$$\mathbf{F} = F \cdot \mathbf{n}, \quad F = l^2, \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (1.1a)$$

Die Laufzeitdifferenz äußert sich in einer Phasenverschiebung

$$\Delta = (c/\lambda) \delta T \quad (1.2)$$

zwischen den beiden Lichtstrahlen, welche gleichzeitig die Verschiebung der Interferenzstreifen auf dem Schirm, gemessen in Streifenbreiten, angibt. Eine solche Streifenverschiebung läßt sich allerdings nur dann messen, falls man den Einfluß der Rotation „abschalten“ kann; das gelingt beispielsweise dadurch, daß man die Ebene der vier Spiegel 1, 2, 3, 4 so dreht, daß (1.1) verschwindet. Dieses einfache Verfahren war jedoch beim MICHELSONschen Versuch unmöglich; da die Meßgenauigkeit der Streifenverschiebung von der Halbwertsbreite der benutzten Spektrallinie abhängt, waren entsprechend (1.1) und (1.2) kilometerlange Lichtwege nötig, um eine nachweisbare Streifenverschiebung aufgrund der relativ geringen Winkelgeschwindigkeit der Erde zu erzielen. Bei diesem Rieseninterferometer mußte sich MICHELSON natürlich nach anderen Methoden umsehen, um die Streifenverschiebung beobachten zu können, worauf wir jedoch hier nicht näher eingehen.

* Die Anregung zu dieser Arbeit verdanken wir einem Briefwechsel mit Dr. T. HERTING, z. Zt. Seattle, USA, welcher uns (in brieflichen Mitteilungen an Prof. H. HÖNL und an den Verf.) auf die Möglichkeit eines Ringlaser-Experimentes zur Prüfung der allgemein-relativistischen Rotationseffekte

aufmerksam gemacht und uns um eine Abschätzung der Größenordnung der zu erwartenden Effekte gebeten hat.

¹ A. MICHELSON, *Astrophys. J.* **61**, 137, 140 [1925].

² G. SAGNAC, *J. Physique* **4**, 177 [1914]; *C. R. Acad. Sci. Paris* **157**, 708, 1410 [1913].



Wegen dieser Unhandlichkeit des MICHELSON-SAGNACSchen Interferometers hat der MICHELSONsche Versuch, welcher das optische Analogon zum FOUCAULTschen Pendelversuch in der Mechanik darstellen sollte, in der Folgezeit kaum wesentliche Bedeutung erlangt. — Die Situation hat sich jedoch inzwischen wesentlich gewandelt. Es gibt nämlich heute ein Verfahren, um nahezu monochromatische optische Strahlung zu erzeugen, und zwar mit Hilfe eines Lasers. Benutzt man einen Laser als Lichtquelle L, so genügt wegen der geringen Halbwertsbreite des Lichts bereits ein Quadrat mit der Seitenlänge $l = 10^2$ cm, um die Erdrotation mit Hilfe eines MICHELSON-SAGNACSchen Interferometers bequem nachweisen zu können³.

Die Verwendung eines Lasers als Lichtquelle gestattet nun außerdem noch eine bedeutsame Modifikation der MICHELSON-SAGNACSchen Versuchsanordnung: Statt den Laser als *äußere* Lichtquelle L außerhalb des geschlossenen Lichtweges 1, 2, 3, 4, 1 zu benutzen (Abb. 1), ist es nunmehr auch möglich, das „aktive Medium“ M des Lasers, welches zur stimulierten Lichtemission befähigt ist, unmittelbar in den geschlossenen Lichtweg, z. B. zwischen 1 und 2, einzubauen (s. Abb. 2). Das einmal vom aktiven Me-

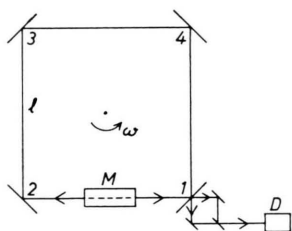


Abb. 2. Zu einem Ringlaser ausgebaute, modifizierte MICHELSON-SAGNACSche Versuchsanordnung zum Nachweis der Erdrotation (M aktives Medium, D Detektor).

dium emittierte Licht bewirkt nach einem Umlauf eine erneute stimulierte Emission usf. Dabei stellt der geschlossene Lichtweg 1, 2, 3, 4, 1 bzw. 1, 4, 3, 2, 1 den „Resonanzraum“ des Lasers dar; das bedeutet: unter allen Wellenlängen oder Frequenzen des zunächst DOPPLER-verbreiterten Lichts, etwa eines Glaslasers, wird nur diejenige Wellenlänge λ oder Frequenz ν verstärkt, welche der Resonanzbedingung

$$\lambda = 2 n \cdot 4 l \quad (1.3a)$$

oder

$$\nu = 1/(8 n \Delta T) \quad (1.3b)$$

genügt, wobei $4 \Delta T = 4 l/c$ die Laufzeit des Lichtes längs des Weges 1, 2, 3, 4, 1 bzw. 1, 4, 3, 2, 1 ist.

Ist die Laufzeit längs dieser beiden Wege verschieden, wie das bei Rotation des Spiegelsystems relativ zu einem Inertialsystem der Fall ist, so gibt es zwei Resonanzstellen, und demnach werden zwei verschiedene Frequenzen des DOPPLER-verbreiterten Laserlichtes verstärkt, und zwar

$$\nu' = \frac{1}{2 n (4 \Delta T - \frac{1}{2} \delta T)} \quad (1.4a)$$

und

$$\nu'' = \frac{1}{2 n (4 \Delta T + \frac{1}{2} \delta T)}, \quad (1.4b)$$

wobei δT wiederum die *Laufzeitdifferenz* des Lichtes längs der beiden Wege bedeutet. Statt der *einen* Frequenz (1.3b) beobachtet man jetzt also die *beiden* Frequenzen (1.4a) und (1.4b), welche symmetrisch zur Frequenz (1.3b) liegen. Der relative Frequenzunterschied beträgt für die quadratische Anordnung der Spiegel:

$$\Delta \nu / \nu = \delta T / 4 \Delta T. \quad (1.5)$$

Er läßt sich wegen der großen Schärfe der einzelnen Laserlinien heute mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-11} messen.

Die hier skizzierte modifizierte MICHELSON-SAGNACSche Versuchsanordnung wird als „Ringlaser“ bezeichnet⁴. Seine hohe Meßgenauigkeit gestattet demnach auch den Nachweis sehr kleiner Laufzeitdifferenzen δT . Es erhebt sich deshalb die Frage, ob der Ringlaser auch in der Lage ist, die bekanntlich sehr kleinen, noch ungeprüften allgemein-relativistischen Rotationseffekte, wie den THIRING-Effekt und die FOKKER-Präzession, nachzuweisen. Hierfür soll im folgenden eine Abschätzung durchgeführt werden. Das Ergebnis zeigt, daß man die Genauigkeit des Ringlasers noch wesentlich erhöhen müßte, um diese allgemein-relativistischen Effekte mit Hilfe eines Ringlasers nachweisen zu können.

§ 2. Zur allgemein-relativistischen Theorie des Ringlaserexperimentes

Bevor wir die zu erwartenden kleinen Effekte diskutieren, soll der Ausdruck (1.1) für δT , welcher für das Meßergebnis (1.5) von ausschlaggebender Bedeutung ist, unter sehr allgemeinen Voraussetzun-

³ A. ROSENTHAL, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 1143 [1962].

⁴ Siehe ³ und W. MACEK u. D. DAVIS, Appl. Phys. Letters **2**, 67 [1963]; W. MACEK, D. DAVIS, R. OLTUIS, J. SCHNEDER u. G. WHITE, Quantum Electronics III, S. 1313, herausgegeben von GRIVET u. BLOEMBERGEN, Columbia University Press, New York 1964.

gen exakt hergeleitet werden. Der Grund für dieses Vorgehen liegt darin, daß die Beziehung (1.1) bisher nur für den Fall einer *flachen* Welt (spezielle Relativitätstheorie) abgeleitet worden ist; die ins Auge gefaßten Effekte sind jedoch charakteristisch für *nicht-flache* Welten (allgemeine Relativitätstheorie). In diesem Fall kann man also nicht sicher sein, daß (1.1) weiterhin unverändert gilt. Eine erneute Berechnung von δT ist deshalb erforderlich.

Wir charakterisieren zunächst die „Geschichte“ der vier Spiegel 1, 2, 3, 4 durch vier zeitartige Weltlinien mit den Tangentenvektoren $u_{(i)}^\mu$ ($u_{(i)\mu} u_{(i)}^\mu = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$ Spiegelindizes, $\mu = 1, 2, 3, 4$ Koordinatenindizes). Ferner ist es zweckmäßig, eine fünfte Weltlinie einzuführen mit dem Tangentenvektor u^μ ($u_\mu u^\mu = 1$), welche beispielsweise die „Geschichte“ der Lichtquelle oder des Schirmes darstellt, und von welcher aus wir die Bewegung aller vier Spiegel beobachten. Die Durchstoßpunkte der Tangenten $u_{(i)}^\mu$ durch die zu $u_{(i)}^\mu$ orthogonale lokale raumartige Hyperfläche mögen zum Zeitpunkt T_1 ein Quadrat der Seitenlänge l bilden; die raumartigen Verbindungs-

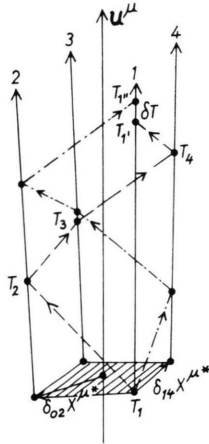


Abb. 3. Zur Berechnung der Laufzeitdifferenz δT zwischen den beiden Strahlen 1, 2, 3, 4, 1' und 1, 4, 3, 2, 1''.

vektoren zwischen den Durchstoßpunkten 1, 2, 3, 4 seien $\delta_{ik} x^{\mu*}$. Das Quadrat sei so klein gewählt, daß es einen Sinn hat, von diesen Abstandsvektoren zu sprechen wie auch von einer zu $u_{(i)}^\mu$ orthogonalen lokalen Hyperfläche. Der Durchstoßpunkt der fünften Weltlinie durch die Hyperfläche möge im Mittelpunkt des Quadrats liegen (s. Abb. 3); die raumartigen Abstandsvektoren zu den vier Spiegeln seien

$\delta_{0i} x^{\mu*}$. Der Projektionstensor $h_{\mu\nu}$, welcher in die zu u^μ und $u_{(i)}^\mu$ orthogonale lokale Hyperfläche projiziert, ist ⁵

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu. \quad (2.1)$$

Projizierte Größen kennzeichnen wir durch einen Stern am Index (z. B. $\delta x^{\mu*} = \delta x^\alpha h_\alpha^\mu$).

Wir berechnen nun die Laufzeit des Lichtes einmal längs des Weges 1, 2, 3, 4, 1' und zum anderen längs des Weges 1, 4, 3, 2, 1'' (s. Abb. 3) und bestimmen die Laufzeitdifferenz δT . Das ist zugleich die Laufzeitdifferenz, welche ein Beobachter auf der 5. Weltlinie feststellt, von welcher das Licht ausgehen und zurückkehren möge, sofern man von Effekten höherer Ordnung absieht. Die Laufzeitdifferenz δT beträgt (s. Abb. 3):

$$\delta T = (T_{21''} - T_{12}) + (T_{32} - T_{23}) + (T_{43} - T_{34}) + (T_{14} - T_{41}), \quad (2.2)$$

wobei T_{ik} die Zeit bedeutet, welche das Licht braucht, um vom i -ten zum k -ten Spiegel zu gelangen, gemessen in der Eigenzeit der Spiegel (nach vorangegangener Synchronisation der Uhren auf der Hyperfläche). Für die Lichtausbreitung gilt (Nullgeodäte)

$$ds = 0, \quad (2.2a)$$

oder nach Zerlegung in die Eigenzeit der Spiegel T und der raumartigen Entfernung S auf der Hyperfläche (Lichtgeschwindigkeit $c = 1$):

$$dT = dS, \quad (2.2b)$$

$$\text{mit} \quad dT = u_\mu dx^\mu, \quad dS^2 = -h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2c)$$

Integration von (2.2b) ergibt:

$$T_{ik} = \int_{x_{(i)}(T_i)}^{x_{(k)}(T_k)} dS_{ik}, \quad x = \{x^\mu\}. \quad (2.3)$$

Hierin ist die Zeitdifferenz $T_k - T_i$ gerade die Laufzeit T_{ik} des Lichtes vom i -ten zum k -ten Spiegel. Ist diese Laufzeit kurz, so gilt

$$x_{(k)}^\mu(T_k) = x_{(k)}^\mu(T_i) + \delta x_{(k)}^\mu \quad (2.4)$$

und aus (2.3) folgt:

$$T_{ik} = \int_{x_{(i)}(T_i)}^{x_{(k)}(T_i) + \delta x_{(k)}} dS_{ik} = S_{ik}(T_i) + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_{(k)}^\mu}(T_i) \delta x_{(k)}^\mu, \quad (2.5)$$

wenn wir die Entwicklung beim linearen Glied abbrechen. Der erste Term der rechten Seite bedeutet die raumartige Entfernung des i -ten vom k -ten Spie-

⁵ Siehe z. B. J. SYNGE, Relativity (the General Theory), North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1960, S. 172.

gel zur Zeit T_i und ist definiert durch:

$$S_{ik} = \sqrt{-(\delta_{0k} x_{\mu^*} - \delta_{0i} x_{\mu^*})(\delta_{0k} x^{\mu^*} - \delta_{0i} x^{\mu^*})} = l, \quad (2.6)$$

$$\text{da} \quad \delta_{ik} x^{\mu^*} = \delta_{0k} x^{\mu^*} - \delta_{0i} x^{\mu^*}. \quad (2.6a)$$

Der 2. Term auf der rechten Seite von (2.5) läßt sich wegen

$$\delta x_{(k)}^{\mu} = \frac{x_{(k)}^{\mu}(T_k) - x_{(k)}^{\mu}(T_i)}{T_k - T_i} (T_k - T_i) = \frac{\partial x_{(k)}^{\mu}}{\partial T} \Delta T, \quad (2.7)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in (2.2) ergibt:

$$\begin{aligned} \delta T = & [S_{21''}(T_4) - S_{12}(T_1)] + [S_{32}(T_3) - S_{23}(T_2)] + [S_{43}(T_2) - S_{34}(T_3)] + [S_{14}(T_1) - S_{41'}(T_4)] \\ & + \left\{ \frac{\partial S_{21''}}{\partial T(1'')} (T_4) - \frac{\partial S_{12}}{\partial T(2)} (T_1) + \frac{\partial S_{32}}{\partial T(2)} (T_3) - \frac{\partial S_{23}}{\partial T(3)} (T_2) + \frac{\partial S_{43}}{\partial T(3)} (T_2) - \frac{\partial S_{34}}{\partial T(4)} (T_3) \right. \\ & \left. + \frac{\partial S_{14}}{\partial T(4)} (T_1) - \frac{\partial S_{41'}}{\partial T(1')} (T_4) \right\} \Delta T. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hierin sind T_i die Zeiten, an welchen das Licht den i -ten Spiegel verläßt (s. Abb. 3). Es gilt in niedrigster Näherung:

$$T_4 = T_1 + 3 \Delta T, \quad T_3 = T_1 + 2 \Delta T, \quad T_2 = T_1 + \Delta T. \quad (2.11)$$

Hiermit folgt aus (2.10) in erster Näherung:

$$\begin{aligned} \delta T = & \left\{ 3 \frac{dS_{21''}}{dT} + \frac{dS_{32}}{dT} - \frac{dS_{34}}{dT} - 3 \frac{dS_{41'}}{dT} \right\} \Delta T \\ & + \left\{ \frac{\partial S_{21''}}{\partial T(1'')} - \frac{\partial S_{12}}{\partial T(2)} + \frac{\partial S_{32}}{\partial T(2)} - \frac{\partial S_{23}}{\partial T(3)} + \frac{\partial S_{43}}{\partial T(3)} - \frac{\partial S_{34}}{\partial T(4)} + \frac{\partial S_{14}}{\partial T(4)} - \frac{\partial S_{41'}}{\partial T(1')} \right\} \Delta T, \end{aligned} \quad (2.12)$$

worin jetzt alles zur selben Zeit T_1 (Ausgangsspiegel) zu nehmen ist.

Andererseits gilt nun mit Rücksicht auf (2.6):

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial T(k)} = \frac{1}{l} (\delta_{0i} x_{\mu^*} - \delta_{0k} x_{\mu^*}) (\delta_{0k} x^{\mu^*})', \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_{ik}}{dT} = & \frac{1}{l} (\delta_{0i} x_{\mu^*} - \delta_{0k} x_{\mu^*}) (\delta_{0k} x^{\mu^*})', \\ & + \frac{1}{l} (\delta_{0k} x_{\mu^*} - \delta_{0i} x_{\mu^*}) (\delta_{0i} x^{\mu^*})'. \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Hierin läßt sich die zeitliche Änderung der Verbindungsvektoren wie folgt auf die Verbindungsvektoren selbst zurückführen⁶:

$$\begin{aligned} (\delta_{0i} x_{\alpha^*})' h_{\mu}^{\alpha} = & u_{\mu||\nu} \delta_{0i} x^{\nu^*} \\ = & (\omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu}) \delta_{0i} x^{\nu^*}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (u_{\alpha||\beta} - u_{\beta||\alpha}) h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta}, \quad (2.14a)$$

die Drehung,

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (u_{\alpha||\beta} + u_{\beta||\alpha}) h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} \quad (2.14b)$$

wobei ΔT die Laufzeit $T_k - T_i$ in niedrigster Näherung bedeutet, umformen in

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_{(k)}^{\mu}} \delta x_{(k)}^{\mu} = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_{(k)}^{\mu}} \frac{\partial x_{(k)}^{\mu}}{\partial T} \Delta T = \frac{\partial S_{ik}}{\partial T(k)} \Delta T; \quad (2.8)$$

hierin bedeutet das Symbol $\partial T(k)$, daß die Zeitdifferentiation nur auf den k -ten Spiegel anzuwenden ist. Mit (2.8) folgt aus (2.5) endgültig innerhalb der Näherung:

$$T_{ik} = S_{ik}(T_i) + \frac{\partial S_{ik}}{\partial T(k)} (T_i) \Delta T. \quad (2.9)$$

die Scherung und

$$\Theta = u^{\mu}{}_{||\mu} \quad (2.14c)$$

die Expansion der vier Weltlinien $i = 1, 2, 3, 4$ relativ zur zentralen fünften Weltlinie beschreiben. Setzen wir nunmehr (2.13a) und (2.13b) unter Verwendung von (2.14) in (2.12) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Symmetrieeigenschaften von (2.14a-b) und auf die Orthonormierungsbedingung (Quadrat)

$$\delta_{0i} x_{\mu^*} \delta_{0k} x^{\mu^*} = -\frac{1}{2} l^2 \delta_{ik} \quad (2.15)$$

das einfache Ergebnis:

$$\delta T = 8(\sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}) \delta_{01} x^{\nu^*} \delta_{02} x^{\mu^*}. \quad (2.16)$$

Für den Fall der *starr*en Rotation des Spiegelsystems ist $\Theta \equiv 0$, $\sigma_{\mu\nu} \equiv 0$ und daher gemäß (1.5) und (2.16):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\delta T}{4 \Delta T} = \frac{2}{l} \omega_{\mu\nu} \delta_{01} x^{\nu^*} \delta_{02} x^{\mu^*}. \quad (2.17)$$

Führen wir nunmehr den dem Tensor $\omega_{\mu\nu}$ dual zugeordneten Vektor ω_{μ} der „Winkelgeschwindigkeit“

⁶ Siehe hierzu z. B. J. EHLERS, Akad. Wiss. Literatur Mainz, Nat.-Math. Klasse Nr. 11, S. 799 [1961].

ein gemäß

$$\omega_\mu = c \eta_{\mu}^{\nu\alpha\beta} u_\nu \omega_{\beta\alpha} \quad (\omega_\mu u^\mu = 0) \quad (2.18)$$

mit dem Dualitätstensor

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}, \quad \varepsilon^{1234} = +1, \quad (2.18a)$$

so nimmt (2.17) die Gestalt an:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2}{l} \frac{\omega^2}{c} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} u^\beta (\delta_{01} x^{\nu*} \delta_{02} x^{\mu*} - \delta_{01} x^{\mu*} \delta_{02} x^{\nu*}). \quad (2.19)$$

Bezeichnen wir die Normale des von den vier Spiegeln gebildeten Quadrats der Fläche F und der Seitenlänge l mit $n^{\mu*}$ ($n_{\mu*} n^{\mu*} = -1$), so geht (2.19) über in:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\omega_\mu n^{\mu*} F}{c l} = \frac{\omega F}{c l} \cos \varphi. \quad (2.20)$$

Hierin bedeutet

$$\omega = \sqrt{-\omega_\mu \omega^\mu} \quad (2.20a)$$

den Betrag der „Winkelgeschwindigkeit“, und φ den Winkel zwischen ω_μ und der Flächennormale $n_{\mu*}$. Das Ergebnis (2.20) für den Fall der *starr*en Rotation stimmt mit der Beziehung (1.1) und (1.5) für die flache Welt genau überein.

§ 3. Die allgemein-relativistischen Rotations-effekte

Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Erde eine zentralsymmetrische Massenkugel ist, welche um die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems $\{x, y, z\}$ (Ursprung im Mittelpunkt der Kugel) relativ zum Fixsternhimmel (Inertialsystem) mit der Winkelgeschwindigkeit Ω *starr* rotiert, folgt aus den EINSTEINSCHEN Feldgleichungen in linearer Näherung (schwache Felder) folgender metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ für das Gebiet *außerhalb* der Erdoberfläche (und bis an die Oberfläche heran)⁷:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = g_{33} = - \left(1 + \frac{2mG}{c^2 r} \right), \\ g_{41} &= -2JG \frac{y}{c^3 r^3}, \quad g_{42} = 2JG \frac{x}{c^3 r^3}, \\ g_{44} &= 1 - \frac{2mG}{c^2 r}, \quad \text{sonst } g_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und der Indizierung $x \triangleq 1, y \triangleq 2, z \triangleq 3, t \triangleq 4$. Hierin bedeutet m die Gesamtmasse

und J den Betrag des Drehimpulses der Erde ($G =$ NEWTONSCHE Gravitationskonstante).

Wir fragen nunmehr nach den Rotationseffekten, welche ein Beobachter auf der rotierenden Erde feststellt. Die Vierer-Geschwindigkeit u_μ eines auf der Erde befindlichen Beobachters ist gemäß (3.1), sofern wir in Ω linearisieren (kleine Winkelgeschwindigkeit der Erde):

$$\begin{aligned} u_\mu &= \left\{ \frac{\Omega}{c} y + \frac{3mG}{c^3 r} \Omega y - 2JG \frac{y}{c^3 r^3}, \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Omega}{c} x - \frac{3mG}{c^3 r} \Omega x + 2JG \frac{x}{c^3 r^3}, \right. \\ &\quad \left. 0, 1 - \frac{mG}{c^2 r} \right\}, \quad u_\mu u^\mu = 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für einen solchen Beobachter verschwindet nach (2.14b + c) Scherung und Expansion: $\sigma_{\mu\nu} \equiv 0, \Theta \equiv 0$ (starre Rotation); dagegen beträgt die nunmehr gemäß (2.20) durch das Ringlaserexperiment (sowie auch durch alle übrigen lokalen optischen Experimente wie den MICHELSON-SAGNACSCHEN Versuch) gemessene *Rotation* oder „Winkelgeschwindigkeit“ ω_μ nach (2.14a), (2.18), (3.1) und (3.2) in erster (linearer) Näherung:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \alpha \frac{xz}{r^2}, & \omega_2 &= \alpha \frac{yz}{r^2}, \\ \omega_3 &= \Omega + \alpha \frac{z^2}{r^2} + \frac{JG}{c^2 r^3}, & \omega_4 &= 0, \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

$$\text{mit} \quad \alpha = 2 \frac{mG}{c^2 r} \Omega - 3 \frac{JG}{c^2 r^3}. \quad (3.3a)$$

Dieses Ergebnis ist folgendermaßen zu deuten: Zunächst finden wir, wie zu erwarten, in $\omega_3 = \omega_z$ die Winkelgeschwindigkeit Ω des auf der Erde befindlichen Beobachters relativ zum Fixsternhimmel wieder. Außerdem treten aber in ω_μ die relativistischen Terme proportional α und J auf. Hierbei hat der zweite Bestandteil von α seinen Ursprung ersichtlich ebenfalls im Drehimpuls \mathbf{J} der Erde und beruht somit wie der letzte Term in ω_3 auf dem sogenannten THIRRING-Effekt, wonach eine rotierende Massenverteilung eine „Mitführung“ des Inertialsystems bewirkt; der erste Bestandteil von α dagegen ist eine Folge der Bewegung des Beobachters relativ zum statischen Gravitationsfeld der Erde infolge der Erdrotation. Dieser Bestandteil würde also auch dann auftreten, wenn z.B. die Erde nicht rotieren würde ($\mathbf{J} = 0$) und der Beobachter beispielsweise in einem Satelliten die Erde (mit der Winkelgeschwindigkeit Ω) umkreist. Das in diesem Falle auftretende ω_μ -Feld würde z.B. die Achse eines mitgeführten

⁷ Siehe z. B. H. HÖNL u. A. MAUE, Z. Phys. **144**, 152 [1956].

Kreisels relativ zum Fixsternhimmel drehen. Dieser Effekt ist als FOKKER-Präzession bekannt, zu welcher also der erste Bestandteil von α Anlaß gibt.

Allerdings gestattet ein Ringlaser-Experiment nicht, diese beiden von α herrührenden Bestandteile zu trennen; sie sind für einen auf der Erde befindlichen Beobachter von gleicher Größenordnung, können sich aber bei der Dichteverteilung im Erdinnern nicht kompensieren. Unter der vereinfachenden Annahme einer konstanten Massendichte im Erdinnern finden wir:

$$J = \frac{2}{5} m r^2 \Omega \quad (3.4)$$

und folglich gemäß (3.3 a):

$$\alpha = \frac{4}{5} \frac{m G}{c^2 r} \Omega. \quad (3.5)$$

Um bei einer Messung relativistischer Effekte den Einfluß des nicht-relativistischen ersten Terms Ω in ω_3 zu unterdrücken, wird man die „Laserfläche“ so legen, daß ihre Normale $n^{\mu*}$ orthogonal auf der

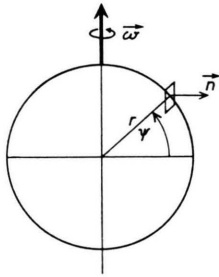


Abb. 4. Zum Ring-Laserexperiment auf der rotierenden Erde. Die Flächennormale \vec{n} steht senkrecht auf der Drehachse und liegt in einer Meridianebene.

Drehachse (z -Achse) der Erde steht, und zwar beispielsweise so, daß die Normale $n^{\mu*}$ in einer Meridianebene liegt; also (s. Abb. 4):

$$n^{\mu*} = \left(1 - \frac{m G}{c^2 r}\right) \{\cos \Omega t, \sin \Omega t, 0, 0\}. \quad (3.6)$$

Bilden wir nunmehr das Skalarprodukt zwischen ω_μ und $n^{\mu*}$, so finden wir mit Rücksicht auf die Position

des Beobachters:

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \cos \Omega t, \\ y = r \cos \psi \sin \Omega t, \\ z = r \sin \psi, \end{cases} \quad (3.7)$$

wobei ψ die geographische Breite ist:

$$\omega_\mu n^{\mu*} = \alpha \sin \psi \cos \psi. \quad (3.8)$$

Hiermit und mit Rücksicht auf (3.5) ergibt sich aus (2.20) die folgende Frequenzaufspaltung des Laserlichtes aufgrund der allgemein-relativistischen Rotationseffekte:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{4}{5} \frac{m G l}{c^3 r} \Omega \sin \psi \cos \psi. \quad (3.9)$$

Sie verschwindet somit an den Polen und auf dem Äquator. Ihr Maximum erreicht sie bei 45° geographischer Breite; hierfür gilt:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu}_{\max} = \frac{2}{5} \frac{m G l}{c^3 r} \Omega \cong 7,2 \cdot 10^{-23}, \quad (3.10)$$

wenn man $l = 10^2$ cm annimmt. Leider liegt dieser Effekt *weit unterhalb* der Grenze der heutigen Meßgenauigkeit des Ring-Lasers, und es besteht auch kaum Hoffnung, daß die Meßgenauigkeit des Ring-Lasers künftig noch so gesteigert werden kann, daß ein Effekt dieser Größenordnung der Messung mit einem Laser zugänglich wird. Auch wird eine Abänderung der gemachten vereinfachenden Annahmen (bisher Erde = starr rotierende, homogene Massenkugel) die Situation nicht wesentlich verbessern.

Es ist demnach einstweilen *nicht* möglich, mit optischen Mitteln (Laser-Experimente) die für die Bestätigung der allgemeinen Relativitätstheorie wichtigen Rotationseffekte (FOKKER-Präzession und THIRING-Effekt) nachzuweisen. Es sei jedoch bemerkt, daß ein Nachweis zumindest der FOKKER-Präzession mittels Kreiseln nicht ausgeschlossen erscheint⁸, da hierbei im Prinzip beliebig lange Meßzeiten zur Verfügung stehen.

⁸ Siehe L. SCHIFF, in „Conférence intern. sur les théories relativistes de la gravitation“, Gauthier-Villars, Paris 1964, S. 71; J. EHLERS, Physikertagung 1965, Plenarvorträge, B. G. Teubner, Stuttgart 1965, S. 300, und V. L. GINZBURG, Astronaut. Acta **12**, No. 2 [1966].